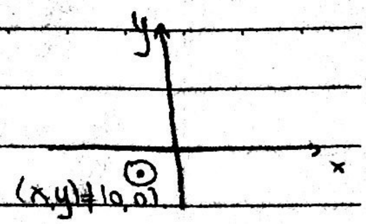
① (Αντι-)Παράδειγμα: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.



$$f(x,y)=\begin{cases} \|(x,y)\|^2 \sin\dfrac{1}{\|(x,y)\|}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. Εξετάζουμε την f στο $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ το οποίο είναι ανοικτό [δηλαδή $\forall (x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ $\exists \varepsilon>0$ $B((x_0,y_0),\varepsilon)\subset\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ και άρα μελετώντας τη συνέχεια, διαφορισιμότητα κ.λ.π. (ομαλότητα = regularity) στο σημείο (x_0,y_0) [οι οποίες ορίζονται μέσω ορίων στο (x_0,y_0)]

Μας αρκεί να θεωρήσουμε [να δούμε] τη συνάρτηση που εξετάζουμε σε μια (οσοδήποτε μικρή) μπάλα $B((x_0,y_0),\varepsilon))$, $\varepsilon>0$, [δηλαδή να την εξετάσουμε τοπικά] και διαπιστώνουμε ότι για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad (x,y)\neq(0,0)$$

Αν $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\in\mathbb{R}$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ και είναι $\left(\text{οι } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, τότε (βλ. προηγούμενο συμπέρασμα/θεώρημα), f συνεχώς διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ $\Rightarrow$

f διαφορίσιμη $\Rightarrow \begin{cases} f \text{ συνεχής} \\ f \text{ μερικώς διαφ.}\end{cases}$ στο $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Εδώ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x} h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, όπου $h(t)=t^2 \sin\frac{1}{t}$, $t>0$

$$\Rightarrow h'(t)=2t\sin\frac{1}{t}+t^2\cos\frac{1}{t}\left(-\frac{1}{t^2}\right)=2t\sin\frac{1}{t}-\cos\frac{1}{t}$$

$$=h'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}=h'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y)\neq(0,0),$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ = το ίδιο με $x \longrightarrow y$

Οι συναρτήσεις αυτές είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ $[\underbrace{(x,y)}_{\in\mathbb{R}^2} \longmapsto x, y$

$C \Rightarrow (x,y) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}$ $\underset{\text{(ισχύει)}}{C}$ $\Rightarrow \underset{\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}{(x,y)} \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ C

πηλίκο συνεχών είναι συνεχής (όπου ορίζεται ο παρονομαστής)

$\Rightarrow \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ \cos \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ C ως σύνθεση συνεχών

[f συνεχής στο $\bar{x}$, $\bar{g}$ συνεχής στο $\bar{y}$

$\Rightarrow \bar{g}\circ\bar{f}$ συνεχής στο $\bar{x}$

$\forall \bar{x}_\nu \to \bar{x}$ $\underbrace{\bar{f}(\bar{x}_\nu)}_{=\bar{y}_\nu} \to \underbrace{\bar{f}(\bar{x})}_{=\bar{y}}$ $\Rightarrow \bar{g}(\bar{f}(\bar{x}_\nu)) \to \bar{g}(\bar{f}(\bar{x}))$]

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$

αμφότερα συνεχ.

Ας δούμε αν υπάρχουν οι $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \in \mathbb{R}$. Επειδή η συνάρτηση f δεν έχει τον ίδιο τύπο στο $(0,0)$ και σε $(x,y)\neq(0,0)$, εξετάζω το όριο $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ (h\neq 0)}} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} h \sin \dfrac{1}{|h|} = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \ldots = 0 \Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0)$. Άρα f μερικώς διαφ. στο $(0,0)$. Είναι διαφορίσιμη;

$\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\binom{x}{y}}{\|(x,y)\|} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{(x,y)\neq 0}{=}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{?}{=} 0$

θ.ν.δ.ο. $\underbrace{(x_\nu,y_\nu) \to (0,0)}_{\iff \|(x_\nu,y_\nu)\| \to 0}$

$$0 \le \|(x_\nu,y_\nu)\| \left|\sin \frac{1}{\|(x_\nu,y_\nu)\|}\right| \le \|(x_\nu,y_\nu)\| \to 0$$

Συνεπώς, $\nabla f(0,0) = (0,0) = Df(0,0)$ [η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$]

$\Rightarrow$ η f είναι διαφορίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ f συνεχής σε όλο (τόσο??) με $Df(0,0)=(0,0)$

και $Df(x,y) \in \mathbb{R}^2$ όπως στα αριστερά του πίνακα το $\mathbb{R}^2$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Επίσης, η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Είναι η f συνεχώς διαφορίσιμη στο $(0,0)$;

δηλ. ισχύει ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{=g}(x,y) \overset{???}{=} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{=g}(0,0) = 0$ [και ανάλογα για $\frac{\partial f}{\partial y}$]

$$\left(\frac{1}{\nu},0\right) \to (0,0) : g\left(\frac{1}{\nu},0\right) = 2\frac{1}{\nu}\sin\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\nu}\right)^2}} - \frac{\frac{1}{\nu}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\nu}\right)^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\nu}\right)^2}}$$

$= \underbrace{2\frac{1}{\nu}\sin\nu}_{\to 0} - \cos\nu$ δεν συγκλίνει για $\nu \to \infty$

$\xrightarrow[\nu\to\infty]{???} 0$

$$\left(\frac{1}{2\pi\nu},0\right) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} (0,0), \text{ αλλά } g\left(\frac{1}{2\pi\nu},0\right) = 2\cdot\frac{1}{2\pi\nu}\overbrace{\sin(2\pi\nu)}^{=0} - \overbrace{\cos(2\pi\nu)}^{=1} =$$

$$= -1 \not\xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$$

Θεώρημα 3.23: (Άλγεβρα παραγώγων)

$\bar{f}, \bar{g} : U \to \mathbb{R}^n$

$g : U \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U$

όπου $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό

$\Rightarrow \bar{f}+\bar{g},\ \bar{f}\cdot\bar{g},\ \varphi\bar{f}$, διαφ. στο $\bar{x}$

και $D(\bar{f}+\bar{g})(\bar{x}) = D\bar{f}(\bar{x}) + D\bar{g}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$\underbrace{D(\bar{f}\cdot\bar{g})(\bar{x})}_{=\nabla(\bar{f}\cdot\bar{g})(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{1\times n}} = \underbrace{\bar{g}(\bar{x})^T}_{\in\mathbb{R}^{1\times m}} \underbrace{D\bar{f}(\bar{x})}_{\in\mathbb{R}^{m\times n}} + \bar{f}(\bar{x})^T D\bar{g}(\bar{x})$$

$$\underbrace{D(\varphi\bar{f})(\bar{x})}_{\in\mathbb{R}^{m\times n}} = \underbrace{\varphi(\bar{x})}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{D\bar{f}(\bar{x})}_{\in\mathbb{R}^{m\times n}} + \underbrace{\bar{f}(\bar{x})}_{\in\mathbb{R}^{m\times 1}} \underbrace{D\varphi(\bar{x})}_{\in\mathbb{R}^{1\times n}}$$

Απόδειξη: Έχουμε ήδη αποδείξει ότι αν $\bar{f}, \bar{g}, \varphi$ μερικώς διαφορίσιμες στο $\bar{x}$ τότε οι $\bar{f}+\bar{g}$, $\bar{f}\cdot\bar{g}$, $\varphi\bar{f}$ μερικώς διαφ. στο $\bar{x}$ και ότι ισχύουν οι παραπάνω τύποι αν αντί για τις παραγώγους θέσουμε τους Ιακωβιανούς πίνακες (ή την κλίση για την g)

Αρκεί να δείξουμε ότι αν αντί για την παράγωγο ~~της~~ $D(\bar{f}+\bar{g})(\bar{x})$, θέσουμε $D\bar{f}(x) + D\bar{g}(\bar{x})$ ← αυτοί υπάρχουν

τότε, πράγματι:

$$\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \frac{(\bar{f}+\bar{g})(\bar{x}+\bar{h}) - (\bar{f}+\bar{g})(\bar{x}) - (D\bar{f}(\bar{x}) + D\bar{g}(\bar{x}))\bar{h}}{\|\bar{h}\|} = \bar{0}$$

Απόδειξη:

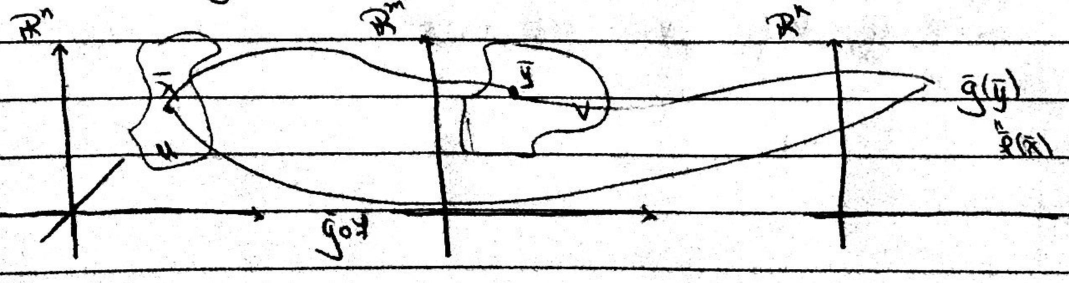
$$= \lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{h}) - \bar{g}(\bar{x}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{x}) - \bar{g}(\bar{x}) - D\bar{f}(\bar{x})\bar{h} - D\bar{g}(\bar{x})\bar{h}}{\|\bar{h}\|}$$

Κανόνας της αλυσίδας:

Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$, $V\subset\mathbb{R}^m$ ανοικτά $\bar{f}: U\to\mathbb{R}^m$ με $\bar{f}(U)\subset V$, $\bar{g}: V\to\mathbb{R}^k$ και $\bar{f}$ διαφορίσιμη στο $\bar{x}$, $\bar{g}$ διαφορίσιμη στο $\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})$ $\Rightarrow$ $\bar{g}\circ\bar{f}: U\to\mathbb{R}^k$ διαφορίσιμη στο $\bar{x}$

και (SOS) $\boxed{D(\bar{g}\circ\bar{f})(\bar{x}) = D\bar{g}(\bar{f}(\bar{x}))\,D\bar{f}(\bar{x})}$

[Ισχύει και για $n=m=k=1$]



Απόδειξη: $A = D\bar{f}(\bar{x})$, $B = D\bar{g}(\bar{y}) = D\bar{g}(\bar{f}(\bar{x}))$

Θ.δ.ο. $\lim_{\bar{y}\to\bar{0}} \frac{(\bar{g}\circ\bar{f})(\bar{x}+\bar{y}) - (\bar{g}\circ\bar{f})(\bar{x}) - BA\bar{n}}{\|\bar{n}\|} = \bar{0}$

[Τεχνικά προαπαιτούμενα για να ορίζονται όλες οι συναρτήσεις $\exists\, \delta_1 > 0$: $B(\overset{\bar{f}(\bar{x})}{\bar{y}}, \delta_1) \subset V$

Άρα το U ανοικτό, $\bar{x} \in U$ και $\bar{f}$ συνεχής στο $\bar{x}$ (ως διαφ. στο $\bar{x}$) $\to$ $\exists\, \delta_2 > 0$: $B(\bar{x}, \delta_2) \subset U$ και $\bar{f}(B(\bar{x}, \delta_2)) \subset B(\overset{\bar{f}(\bar{x})}{\bar{y}}, \delta_1) \subset V$

$\forall \overset{\delta_1}{\varepsilon} > 0\ \exists \overset{\delta_2}{\delta} > 0 \longrightarrow$ [$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$

$\forall z \in B(\bar{x}_0, \delta)$ $\quad \forall \bar{z} \in \|\bar{z} - \bar{x}\| < \delta$

$\bar{f}(\bar{z}) \in B(\bar{f}(\bar{x}), \varepsilon)$ $\quad \|\bar{f}(\bar{z}) - \bar{f}(\bar{x})\| < \varepsilon$]

$\bar{f}(B(\bar{x}, \delta)) \subset B(\bar{f}(\bar{x}), \varepsilon)$

Έστω $\bar{n} \in B(\bar{0}, \delta_2) \setminus \{\bar{0}\} \subset \mathbb{R}^n$ και $\bar{\xi} \in B(\bar{0}, \delta_1) \setminus \{\bar{0}\} \subset \mathbb{R}^m$

τότε $\bar{x} + \bar{n} \in B(\bar{x}, \delta_2) \setminus \{\bar{x}\} \subset U$, $\bar{f}(\bar{x}+\bar{n}) \in B(\bar{y}, \delta_1) \subset V$

$\bar{y} + \bar{\xi} = \bar{f}(\bar{x}) + \bar{\xi} \in B(\bar{y}, \delta_1) \setminus \{\bar{y}\} \subset V$.

Γνωρίζουμε $\lim_{\bar{n}\to\bar{0}} \frac{\overbrace{\bar{f}(\bar{x}+\bar{n}) - \bar{f}(\bar{x}) - A\bar{n}}^{=\bar{\varphi}(\bar{n})}}{\|\bar{n}\|} = \bar{0}$

$\lim_{\bar{\xi}\to\bar{0}} \frac{\overbrace{\bar{g}(\bar{y}+\bar{\xi}) - \bar{g}(\bar{y}) - B\bar{\xi}}^{\to \psi(\bar{n})}}{\|\bar{\xi}\|} = \bar{0}$

Δηλ. ισοδύναμα, ότι $\bar{f}(\bar{x}+\bar{n}) = \bar{f}(\bar{x}) + A\bar{n} + \bar{\varphi}(\bar{n})$ με $\lim_{\bar{n}\to\bar{0}} \frac{\bar{\varphi}(\bar{n})}{\|\bar{n}\|} = \bar{0}$

και $\bar{g}(\bar{y}+\bar{\xi}) = \bar{g}(\bar{y}) + B\bar{\xi} + \bar{\psi}(\bar{\xi})$, $\lim_{\bar{\xi}\to\bar{0}} \frac{\bar{\psi}(\bar{\xi})}{\|\bar{\xi}\|} = \bar{0}$

$\Rightarrow (\bar{g}\circ\bar{f})(\bar{x}+\bar{n}) = \bar{g}(\bar{f}(\bar{x}+\bar{n}))$

$= \bar{g}(\underbrace{\bar{f}(\bar{x})}_{=\bar{y}} + \underbrace{A\bar{n} + \bar{\varphi}(\bar{n})}_{=\bar{\xi}}) = \bar{g}(\bar{y}) + BA\bar{n} + B\bar{\varphi}(\bar{n}) + \bar{\psi}(A\bar{n} + \bar{\xi}(\bar{n}))$

Άρα, μένει να δείξουμε $\lim_{\bar{n}\to\bar{0}} \frac{B\bar{\varphi}(\bar{n}) + \bar{\psi}(A\bar{n} + \bar{\varphi}(\bar{n}))}{\|\bar{n}\|} = \bar{0}$

Αφού $\lim_{\bar{n}\to\bar{0}} \underbrace{\frac{\bar{\varphi}(\bar{n})}{\|\bar{n}\|}}_{=\bar{\varphi}_1(\bar{n})} = \overset{\bar{\varphi}_1(0)}{\bar{0}}$ και $\lim_{\bar{n}\to\bar{0}} B\bar{\xi} = \bar{0}$ [$\|B\bar{\xi}\| \le \|B\|\|\bar{\xi}\|$]

$\Rightarrow$ (σύνθεση συνεχών = συνεχής) $\lim_{\bar{n}\to\bar{0}} \frac{B\bar{\varphi}(\bar{n})}{\|\bar{n}\|} = \bar{0}$. Επίσης, $\lim_{\bar{\xi}\to\bar{0}} \frac{\bar{\psi}(\bar{\xi})}{\|\bar{\xi}\|} = \bar{0} \Leftrightarrow F_1(\bar{\xi})$.

$\bar{\varphi}(\bar{\xi}) = \|\bar{\xi}\| \bar{\varphi}_1(\bar{\xi})$ με $\lim_{\bar{\xi}\to\bar{0}} \bar{\varphi}_1(\bar{\xi}) = \bar{0}$.

$$\Rightarrow \frac{\|\bar{\varphi}(A\bar{n} + \bar{g}(\bar{n}))\|}{\|\bar{n}\|} = \frac{\|A\bar{n} + \bar{g}(\bar{n})\| \cdot \|\bar{\varphi}_1(A\bar{n} + \bar{\varphi}(\bar{n}))\|}{\|\bar{n}\|}$$

Ακόμα, $\exists \delta_3 \in (0, \delta_2)$ $\forall \bar{n} \in B(0, \delta_3) \setminus \{0\} \leq \|\bar{n}\|$

$$\Rightarrow \forall \bar{n} \in B(\bar{0}, \delta_3) \setminus \{\bar{0}\}: \frac{\|\bar{\varphi}(A\bar{n} + \bar{\varphi}(\bar{n}))\|}{\|\bar{n}\|} \leq \frac{(\|A\| + 1)\|\cancel{\bar{n}}\| \cdot \|\bar{\varphi}_1(A\bar{n} + \bar{\varphi}(\bar{n}))\|}{\|\cancel{\bar{n}}\|}$$

$\underset{\text{συνεχής}}{\Longrightarrow}$ $\bar{n} \longmapsto A\bar{n}$ συνεχής

συνεχής ∘ συνεχής: $\bar{n} \longmapsto \bar{\varphi}(\bar{n})$ συνεχής

$\bar{\xi} \longmapsto \bar{\varphi}_1(\bar{\xi})$ συνεχής

$$\lim_{\bar{n}\to\bar{0}} \|\bar{\varphi}_1(A\bar{n} + B\bar{\varphi}(\bar{\xi}))\| = 0.$$